Algebra I 2009, Blatt 6

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Zeigen Sie, dass die Transpositionen $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$ erzeugen die symmetrische Gruppe S_n. Zeigen Sie, dass die Transposition $(1,2)$ und der Zykel $(1,2,\ldots,n)$ erzeugen S_n.

2. Sei $\sigma := (1,4,7,10) \circ (2,6,3) \circ (5,8,9) \in S_{10}$. Berechen Sie σ^{100}. Definiert man die Zykeln $p := (3,4,5,2,1), q := (2,3,4,5,1), r := (4,5,3,1,2) \in S_5$. Bestimmen Sie die Permutation $x \in S_5$ mit $p \circ x \circ q = r$.

3. (i) Sei $H := \{\sigma \in S_3 : \sigma(3) = 3\}$. Zeigen Sie, dass $H \leq S_3$ und $H \cong S_2$. Ist H ein Normalteiler von S_3? Finden Sie alle links Nebenklassen xH mit $x \in S_3$.
(ii) Sei H ein Untergruppe von S_n mit $|S_n : H| = n$. Zeigen Sie, dass $H \cong S_{n-1}$.

4.

1. Sei G eine Gruppe und wenn $x, y \in G$, setzt man $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1} \in G$. Sei $D(G) := [G,G]$ die Untergruppe von G erzeugt von allen Elemente $[x,y] \in G$, mit $x, y \in G$. Zeigen Sie, dass $[G,G]$ ein Normalteiler von G ist, und die Faktorgruppe $G/[G,G]$ abelsch ist.

2. Sei H ein Normalteiler von G, sodass G/H abelsch ist. Zeigen Sie dass $[G,G] \subset H$.

3. Durch Induktion, definiert man für $k \geq 2$
$$D^k(G) := D(D^{k-1}(G)).$$
Sei H ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass
$$D^k(G/H) = \big(HD^k(G)\big)/H.$$