Algebra I 2009, Blatt 8

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Sei R ein Ring, mit der Eigenschaft, dass $x^3 = x$, für alle Elemente $x \in R$. Zeigen Sie, dass R kommutativ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Ringen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}[X]$ nich isomorph sind, aber die abelsche Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}[X], +)$ sind isomorph.

3.

1. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] := \{\frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

ein Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist.

2. Sei p ein Primzahl. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, p \text{ teilt} b \text{ nicht}\},$$

einen Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bildet.

4.

1. Sei R ein Ring, und $I, J \subset R$ Idealen von R. Zeigen Sie dass $I \cap J$ und

$$I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}$$

Idealen von R sind.

2. Sei R, S Ringen, und $f : R \to S$ ein sujektiver Ringhomorphismus. Zeigen Sie, dass falls $I \subset R$ ein Ideal ist, dann auch $f(I)$ ein Ideal von S ist.