Algebra I 2009, Blatt 9

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1.

1. Sei I ein Ideal eines kommutativen Ringes R. Der Annihilator von I ist definiert durch
$$\mathrm{Ann}(I) := \{x \in R : xa = 0, \quad \text{für alle } a \in I\}.$$
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ann}(I)$ ein Ideal von R ist.

2. Zeigen Sie, dass die Menge $I := \{\overline{n} \in \mathbb{Z}_{20} : n \text{ gerade ist}\}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}_{20}$ ist. Bestimmen Sie den Annihilator $\mathrm{Ann}(I)$.

2. Sei A eine beliebige Menge mit p Elemente, wobei p eine Primzahl ist. Wieviele nicht isomorphe Ringen $(A, +, \cdot)$ kann man auf A definieren?

3.

1. Finden Sie für jede ganze Zahl $n \geq 1$, einen Ring R die genau n Idealen hat.

2. Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $(Z_{p^n})^*$ der Einheiten von $\mathbb{Z}_{p^n}$, zyklisch ist.

4. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass
$$I := \bigcap_{\lambda \in K} \left(X^2, Y + \lambda X\right)$$
ein Ideal des Ringes $K[X, Y]$ der Polynomen ist. Finden Sie ein erzeugendes System für I.