Algebra II 2010, Blatt 2

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Fü den Zerfällungskörper L von $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, zeigen Sie dass $[L : \mathbb{Q}] = 4$. Können Sie L darstellen?

2. Bestimmen Sie für die folgenden Polynomen aus $\mathbb{Q}[X]$ einen Zerfällungkörper in $\mathbb{C}$ und den Grad dieses Zerfällungskörpers über $\mathbb{Q}$:

- $X^2 - 3$.
- $X^4 - 7$.
- $X^5 = 1$.

3. Es sei L/K eine algebraische Erweiterung. Ist jeder algebraische Abschluss von L auch ein alebraischer Abschluss von K und umgekehrt?

4. Existieren algebraische Abschlüsse E, F eines Körpers K derart, dass F zu einem echten Teilkörper von E isomorph ist?

5. Es sei L ein Zerfällungskörper von $P \in K[X]$, und $n := \mathrm{grad}(f)$. Zeigen Sie, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist. Geben Sie ein Beispiel mit $n \geq 3$, bei dem $[L : K] = n!$ gilt.

6. Man überprufe die folgende Körpererweiterung auf Normalität:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{3}})/\mathbb{Q}.$$

7. Wenn L/E und E/K separable Körpererweiterungen sind, ist auch L/K separabel.

8. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie: Wenn K vollkommen ist, so ist auch L vollkommen. Wenn L vollkommen und separabel über K ist, so ist auch K vollkommen.