

# Algebra II 2010, Blatt 3

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Man bestimme  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ , mit  $L = \mathbb{Q}(\zeta)$  für  $\zeta = e^{2\pi i/5}$ , dazu alle Untergruppen  $H \leq \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  und alle Fixkörper  $L^H \subset L$ .

2. Sei  $K$  ein Körper mit  $p^n$  Elementen, und  $K \subset L$  eine endliche Erweiterung vom Grad  $m$ . Zeigen Sie:  $\text{Gal}(L/K) = \mathbb{Z}_m$ .

3. Es seien  $E, F, K, L$  Körper mit  $K \subset E, F \subset L$  und  $[L : K] < \infty$ . Sind  $E/K$  und  $F/K$  galoissch, so auch  $EF/K, E \cap F/K, EF/E \cap F$  und  $F/E \cap F$ .

4. Man bestimme die Galoisgruppe des Polynoms  $X^3 - 10$  über (a)  $\mathbb{Q}$  und (b)  $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ .

5. Man bestimme für  $n \in \mathbb{N}$  die Galoisgruppe von  $X^n - t$  über  $\mathbb{C}(t)$ .

6. Es sei  $\zeta \neq 1$  eine  $n$ -te Einheitswurzel. Man zeige,

$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

7. Bestimme die Galoisgruppe des Polynoms  $X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ .

8. Sei  $K$  ein Körper und  $f \in K(X)$  eine rationale Abbildung mit der Eigenschaft  $f(X) = f(1/X)$ . Zeigen Sie: Es gibt ein  $g \in K(X)$  mit  $f(X) = g(X + 1/X)$ .

9. Beweisen Sie, dass es einen Körper  $K \supset \mathbb{Q}$  gibt, der galoissch ist über  $\mathbb{Q}$  und  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_7$ .

10. Man bestimme den Grad von  $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{5})$  über  $\mathbb{Q}$ . Welchen Grad hat den Zerfällungskörper  $L$  von  $X^{10} - 5$  über  $\mathbb{Q}$ ?