

Algebra II 2010, Probeklausur

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Es sei $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von R -Moduln. Beweisen Sie, dass wenn M' und M'' beide endlich erzeugbar sind, so auch ist M .

2. Ein R -Modul M heisst unzerlegbar, wenn für all Untermoduln M_1, M_2 von M mit $M = M_1 \oplus M_2$ gilt, dass $M_1 = 0$ oder $M_2 = 0$.

Zeigen Sie, dass ein R -Modul $M \neq 0$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $0, 1 \in \text{End}_R(M)$ die einzigen idempotenten Elemente in $\text{End}_R(M)$ sind.

3. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

4. Bestimmen Sie den Grad der folgenden Teilkörper K von \mathbb{C} und jeweils eine \mathbb{Q} -Basis von K :

(a) $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. (b) $K := \mathbb{Q}(\sqrt{8}, 3 + \sqrt{50})$.

5. Welche der folgenden Körpererweiterungen besitzen ein Primitives Element? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$. (b) $K(X, Y)/K(X + Y, XY)$.

6. Sei $a := \frac{X^3}{X^2+1} \in K(X)$. Ist die Körpererweiterung $K(a) \subset K(X)$ algebraisch? Bestimmen Sie den Grad $[K(X) : K(a)]$.

7. Beweisen Sie dass, $F_2[X]/(X^4 + X^3 + 1)$ ein Körper mit 16 Elementen ist. In diesem Körper finden Sie alle Nullstellen von $f := X^4 + X^3 + 1$.

8. Sei R ein Integritätsbereich und $f \in R[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Beweisen Sie, dass f am meisten n Nullstellen hat.

9. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\phi : K \rightarrow K^3$ durch

$$\phi(t) := (t^3, t^4, t^5)$$

gegeben. Beweisen sie, dass $X := \text{Im}(\phi)$ eine algebraische Teilmenge von K^3 ist und berechnen Sie das Ideal $I(X)$. Ist der Koordinatenring $A(X)$ isomorph zu $K[t]$?

10. Seien $I_1, I_2 \subset K[X_1, \dots, X_n]$ Idealen. Beweisen Sie, dass

$$Z(I_1 \cdot I_2) = Z(I_1) \cup Z(I_2).$$