Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2017-18, Blatt 11

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1.

- Sei E ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $K \subset L$. Ist $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, so ist
$$\mathrm{Gal}\big(L/\sigma(E)\big) = \sigma \ \mathrm{Gal}(L/E)\sigma^{-1}.$$

- Zeigen Sie, dass die folgenden Körpererwiterungen Galois sind und bestimmen Sie die entsprechenden Galoisgruppen:
$$K\Big(\frac{X^2+1}{X}\Big) \subseteq K(X) \ \text{ und } \ K\Big(\frac{X^2-(X+1)^3}{X^2(X-1)^2}\Big) \subseteq K(X).$$

2. Gegeben sei das Polynom $g = X^6 + X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

- Bestimme den Zerfällungskörper L von g und die zugehörige Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

- Fasst man g als Polynom in $\mathbb{F}_5[X]$ auf, so hat dieses Polynom welche Galoisgruppe?

3. Sei $f(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Listen Sie alle Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf, wobei L der Zerfällungskörper von f ist. Die selbe Aufgabe für das Polynom $f := X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

4.

- Sei $f(X) = X^p - X - a \in \mathbb{F}_p[X]$, wobei $a \in \mathbb{F}_p - \{0\}$. Sei L der Zerfällungskörper von f und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeige, dass $\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+p-1$ Nullstellen von f sind. Bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p)$.

- Sei K ein körper und $L := K(X)$. Bestimmen Sie den Fixkörper L^G, wobei G die zyklische Gruppe erzeugt von dem K-Automorphismus
$$K(X) \ni u(X) \mapsto u(X+1) \in K(X)$$
ist.