

Algebra und Funktionentheorie

Wintersemester 2017-18, Blatt 12

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (i) Man bestimme alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, für $n = 5, 7, 9$, wobei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(ii) Sei K ein Körper der eine primitive n -te Einheitswurzel ϵ enthält. Sei $b \in \overline{K}$ eine Wurzel des Polynoms $X^n - a \in K[x]$. Dann ist die Galoisgruppe

$$G := \text{Gal}(K(b)/K)$$

zyklisch und $|G|$ teilt n .

2. (i) Sei K ein Körper der Charakteristic $p > 0$ und $f := X^p - X + a \in K[X]$ ein Polynom. Sei $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f . Zeigen Sie, dass die Erweiterung $K \subseteq K(\alpha)$ Galois ist und bestimmen Sie die entsprechende Galoisgruppe.

(ii) Man bestimme das Zyklotomische Polynom $P_{16}(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

3. (i) Sind die folgenden Funktionen komplex differentierbar?

$$f(x, y) = y^2 \sin(x) + iy, \quad g(x, y) = \sin^2(x + y) + i \cos^2(x + y).$$

(ii) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, jeweils andere Funktionen $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die komplexe Funktion $u + iv$ komplex differentierbar ist:

$$u(x + iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y, \quad u(x + iy) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin(x) - e^y \cos(x).$$

4. Bestimmen Sie alle Punkte in der komplexen Ebene, in denen die Funktionen

$$|z|^2(|z|^2 - 2), \quad z(z + \bar{z}^2)$$

komplex differentierbar sind.