Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2017-18, Blatt 13

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (i) Zeige mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen: Ist f holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und gilt eine der folgenden Bedingungen:

$$(i) \text{ Re } f = \text{ konstant}, \text{ Im } (f) = \text{ konstant }, \ (iii) \ |f| = \text{ konstant },$$

dann ist f eine konstante Abbildung.

(ii) Geben Sie eine holomorphe bijektive Abbildung

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq (\text{Re } z)^2\}$$

an.

2. Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin 3z = 3\sin z - 4 \sin {}^3 z, \quad \cos 3z = 4\cos^3 z - 3 \cos z.$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos z \in \mathbb{R}$?

3. Sei $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ gegeben durch $q(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung q ist surjektiv. Für jeden Punkt $w \in \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ besteht $q^{-1}(w)$ aus genau zwei Punkten c und c^{-1}.

(ii) q bildet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ bijektiv auf $\mathbb{C}[-1, 1]$ ab.

(iii) q bildet $\mathbb{H}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ ab.

4. (i) Seien $r, s > 0$ und γ der Rechteckrand

$$[-r - is, r - is] + [r - is, r + is] + [r + is, -r + is] + [-r + is, -r - is].$$

Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

(ii). Sei $G := \{z \in \mathbb{U} : \text{Re } z + \text{Im } z > 1\}$. Konstruieren Sie einen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\partial G = \text{Bild}(\gamma)$ und berechnen Sie

$$\int_\gamma \text{Im}(z) dz \quad \text{sowie} \quad \int_\gamma \frac{z}{|z|} dz.$$