

Übungsaufgabe zur Vorlesung  
**Algebra und Funktionentheorie 2017/18, Blatt 2**

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 6.11.2017 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:** Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.  
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Sei  $G$  eine Gruppe. Man definiert das *Zentrum* der Gruppe  $G$  durch

$$Z(G) := \{a \in G : a \cdot g = g \cdot a, \text{ für alle } g \in G\}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $Z(G)$  ein Normalteiler von  $G$  ist.
- (b) Falls die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  zyklisch ist, zeigen Sie, dass die Gruppe  $G$  abelsch ist.
- (c) Bestimmen Sie das Zentrum  $Z(D_n)$  der Diedergruppe  $D_n$ .

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

- (a) Sei  $G$  eine Gruppe und  $H, K \subset G$  zwei Normalteilern von  $G$ . Falls  $G/H$  und  $G/K$  beide abelsche Gruppen sind, zeigen Sie, dass  $G/(H \cap K)$  auch abelsch ist.
- (b) Finden Sie eine unendliche Gruppe  $G$  in der jedes Element endliche Ordnung hat.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Sei  $p$  eine Primzahl. Man betrachte die Menge

$$\mathbb{C}_{p^n} := \{z \in \mathbb{C}^* : z^{p^n} = 1\}.$$

- (a) Zeigen Sie dass die Ungleichungen

$$1 = \mathbb{C}_{p^0} < \mathbb{C}_p < \mathbb{C}_{p^2} < \dots < \mathbb{C}_{p^n} \dots$$

gelten.

- (b) Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{C}_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}_{p^n}$$

eine Untergruppe von  $\mathbb{C}^*$  ist, und jede Untergruppe von  $\mathbb{C}_{p^\infty}$  auf der Form  $\mathbb{C}_{p^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

- (a) Sei  $G$  eine Gruppe und  $p$  die kleinste positive Zahl die  $|G|$  teilt. Sei  $N$  ein Normalteiler der Ordnung  $p$  von  $G$ . Beweisen Sie, dass  $N \leq Z(G)$  gilt.
- (b) Sei  $G$  eine endliche  $p$ -Gruppe. Zeigen Sie, dass  $Z(G) \neq \{e\}$ .
- (c) Sei  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p^2$ . Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.