

# Algebra und Funktionentheorie, Wintersemester 2017/18, Blatt 3

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

Abgabetermin: 13.11.2018 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:** Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.  
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

1. (10 Punkte) Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $H \subset G$  ein Normalteiler,  $f : G \rightarrow G/H$  die kanonische Projektion und  $P \leq G$  eine  $p$ -Sylowgruppe. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

- Der Durchschnitt  $P \cap H \leq H$  ist eine  $p$ -Sylowgruppe von  $H$ .
- Das Bild  $f(P) \leq G/H$  ist eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G/H$ .

2. (10 Punkte) Sei  $G = D_n$  die dihedrale Gruppe der Ordnung  $\text{ord}(G) = 2n$ , mit  $n \geq 3$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Es gibt genau eine zyklische Untergruppe  $N \leq G$  vom Index  $[G : N] = 2$ .
- Es gibt genau  $n$  nichtzentrale Elemente  $x \in G - Z(G)$  von Ordnung  $\text{ord}(x) = 2$ .
- Sei  $x \in G$  ein nichtzentrales Element mit  $\text{ord}(x) = 2$  und  $H = \{e, x\}$  die davon erzeugte Untergruppe. Betrachtet man die Quotientmenge  $X := G/H$ . Dann ist der zur Multiplikationsaktion  $G \times X \rightarrow X$  gehörige Homomorphismus

$$\varphi : G \longrightarrow \text{Sym}(X) \quad g \mapsto (yH \mapsto gyH)$$

inektiv.

3. (10 Punkte)

- Sei  $H$  eine  $p$ -Sylow Untergruppe einer endlichen Gruppe  $G$ . Beweisen Sie, dass  $H$  die einzige  $p$ -Sylow Untergruppe der Normalisatorgruppe  $N_G(H)$  ist.
- Man zeige, dass es keine einfache Gruppe  $G$  mit 50 Elementen gibt.

- Man zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 40 einen echten Normalteiler besitzt.

4. (10 Punkte)

- Wie viele 2-Sylowgruppen besitzt  $S_5$ ?
- Sei  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $2p$ . Dann entweder ist  $G$  zyklisch oder isomorph zu der dihedralen Gruppe  $D_p$ .
- Zeigen Sie, dass bis auf Isomorphie nur zwei nichtabelschen Gruppen der Ordnung 8 gibt. Beschreiben Sie diese Gruppen.