

# Algebra und Funktionentheorie

## Wintersemester 2017-18, Blatt 4

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte) a) Zeigen Sie, dass die Transpositionen  $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$  erzeugen die symmetrische Gruppe  $S_n$ . Zeigen Sie, dass die Transposition  $(1, 2)$  und der Zykel  $(1, 2, \dots, n)$  erzeugen  $S_n$ .

(b) Betrachtet man die Zykeln

$$p := (3, 4, 5, 2, 1), q := (2, 3, 4, 5, 1), r := (4, 5, 3, 1, 2) \in S_5.$$

Bestimmen Sie die Permutation  $x \in S_5$  mit  $p \circ x \circ q = r$ .

2. (10 Punkte) (i) Sei  $H := \{\sigma \in S_3 : \sigma(3) = 3\}$ . Zeigen Sie, dass  $H \leq S_3$  und  $H \cong S_2$ . Ist  $H$  ein Normalteiler von  $S_3$ ? Listen Sie alle links Nebenklassen  $xH$ , mit  $x \in S_3$  auf.

(ii) Sei  $H$  ein Untergruppe von  $S_n$  mit  $|S_n : H| = n$ . Dann gilt  $H \cong S_{n-1}$ .

3. (10 Punkte) (a) Es sei  $\Gamma$  die von den Elementen  $\omega = (123)(456)(789)$  und  $\pi = (147)(258)(369)$  in  $S_9$  erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie, dass  $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

(b) Zeigen Sie, dass die von den Permutationen

$$\sigma = (2437)(5698) \text{ und } \tau = (2539)(4876)$$

erzeugte Untergruppe  $\Delta$  von  $S_9$  eine Gruppe von Ordnung 8 ist.

4. (10 Punkte) (a) Sei  $K$  ein Normalteiler einer endlichen Gruppe  $G$ . Ist  $P \leq G$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $K$  ist, dann gilt

$$G = KN_G(P).$$

(b) Beweisen Sie, dass in der symmetrischen Gruppe  $S_4$  keine Reihe von Untergruppen

$$1 = G_n \leq G_{n-1} \leq \dots \leq G_1 \leq G_0 = S_4,$$

gibt, die besteht aus zyklischen Gruppen, so dass jede Untergruppe  $G_i$  Normalteiler von  $G$  ist.

(c) Beweisen Sie, dass dagegen für jede endliche  $p$ -Gruppe eine solche aufsteigende Reihe von Untergruppen existiert.