Algebra und Funktionentheorie, Wintersemester 2017/18, Blatt 5

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

Abgabetermin: 27.11.2018 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

1. (10 Punkte) Sei G eine Gruppe und $G' := [G, G]$ die Kommutatorgruppe.

- Es gilt $S'_n = A_n$ für jedes $n \geq 1$.
- Es gilt $A'_n = A_n$ für jedes $n \geq 5$. Berechnen Sie A'_4.

2. (10 Punkte)

- Es seien U eine Untergruppe und N ein Normalteiler einer Gruppe G. Dann gilt für alle natürliche Zahlen n:

$$U^{(n)} \subseteq G^{(n)} \text{ und } (G/N)^{(n)} \cong G^{(n)}/G^{(n)} \cap N \cong G^{(n)}N/N.$$

- Es sei N ein Normalteiler einer Gruppe G. Sind N und G/N auflösbar, so ist auch G auflösbar.
- Für welche n ist die Diedergruppe D_n auflösbar?

3. (10 Punkte) Für Elemente $x, y, z \in G$, sei $[x, y, z] := [x, [y, z]] \in G$.

- Zeigen Sie, dass für Elemente $x, y, z \in G$, es gilt:

$$(y[x, y^{-1}, z]y^{-1})(z, [y, z^{-1}, x]z^{-1})(x[z, x^{-1}, y]x^{-1}) = 1.$$

- Für Untergruppen $A, B, C \leq G$, definiert man $[A, B, C] := [A, [B, C]]$. Zu zeigen: Ist $[A, B, C] = 1 = [B, C, A]$, dann gilt $[C, A, B] = 1$.

4. (10 Punkte)

- Bestimmen Sie die Anzahl nichtisomorpher abelscher Grupppen der Ordnung 360.

- Bestimmen Sie die höheren Kommutatorgruppen $Q^{(n)}$ der Quaternionengruppe Q (der Ordnung 8 und erzeugt von zwei Elementen $a, b \in G$ mit Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$ und $a^{-1} = bab^{-1}$).