Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2017/18, Blatt 6

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte)

• Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass

$$I := \bigcap_{\lambda \in K} \big(X^2, Y + \lambda X\big)$$

ein Ideal des Ringes $K[X, Y]$ der Polynomen in zwei variabeln ist. Finden Sie ein erzeugendes System für I.
• Sei R ein kommutativer unitärer Ring und $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in R[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass f nilpotent ist (d.h. $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$), genau dann wenn alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in R$ nilpotent sind.
• Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Seien $a \in R^*$ invertierbar und $b \in R$ ein nilpotentes Element. Dann ist $a + b$ invertierbar.

2. (10 Punkte)

• Sei R ein unitärer Ring (nicht unbedingt kommutativ!) und $a, b \in R$. Zeigen Sie: Ist $1 - ab \in R$ invertierbar, dann ist $1 - ba \in R$ auch invertierbar.
• Sei R ein Ring. Bezeichnet man das Zentrum

$$Z(R) := \{x \in R : xa = ax \text{ für jedes } a \in R\}.$$

Zu zeigen: Ist $a^2 - a \in Z(R)$ für jedes $a \in R$, dann ist R kommutativ.

3. (10 Punkte)

• Sei R ein Integritätsbereich und $(R^*, \cdot)$ die Gruppe aller invertierbaren Elemente. Zu zeigen: jede endliche Untergruppe $H \leq R^*$ ist zyklisch.
• Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ die Menge allen Nullteiler von R. Bildet I ein Ideal von R?

4. (10 Punkte)

• Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$[\Gamma_i(G), \Gamma_j(G)] \subseteq \Gamma_{i+j}(G),$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$.
• Sei G eine nilpotente Gruppe und $H < G$ eine echte Untergruppe. Dann gilt

$$H \cap Z(G) \neq 1.$$