

Algebra und Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18, Blatt 7

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte)

- Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl mit $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$. Zu zeigen: im Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ ist das Element 2 irreduzibel aber kein Primelement.
- Zeigen Sie, dass das Polynom

$$X^2Y + X^2 + Y \in \mathbb{Q}[X, Y]$$

irreduzibel ist.

- Zu zeigen: Die Elemente $7 + 12i$ und $1 + 2i \in \mathbb{Z}[i]$ prim sind .

2. (10 Punkte)

- Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ euklidisch ist.
- Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ euklidisch ist.
- Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Dann lässt sich $p \in \mathbb{Z}[i]$ als Produkt von höchstens zwei irreduziblen Elementen in $\mathbb{Z}[i]$ darstellen.

3. (10 Punkte)

- Sei R ein Hauptidealring und $a \in R$, $a \neq 0$. Zu zeigen: der Ring $R[X]/(aX - 1)$ ist auch ein Hauptidealring.
- Zeigen Sie, dass im Ring $\mathbb{Z}[X]$, das Ideal (X) prim aber kein Maximalideal ist.

4. (10 Punkte)

- Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 4 bzw. $18 + 36i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$.
- Wie viele Primideale besitzt den ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Zeigen Sie, dass das Ideal $(7, X^2 + 1) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ maximal ist.