

**Übungsaufgabe zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie**

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 02.07.2012 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Auf \mathbb{C} definiert man die folgenden Verknüpfungen:

$$z_1 \top z_2 := z_1 + z_2, \quad z_1 \perp z_2 := z_1 z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, \top, \perp)$ ein Ring ist und finden Sie alle invertierbare Elemente.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$, ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring und $x, y \in R$ Elemente. Zeigen Sie: Ist $1 - xy \in R$ invertierbar dann ist auch $1 - yx$ invertierbar.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Menge aller Matrizen auf die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, mit Addition und Matrixmultiplication ein Körper bildet, der isomorph zu \mathbb{C} ist.