

Übungsaufgabe zur Vorlesung  
**Algebra / Zahlentheorie**

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 02.07.2012 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:** Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.  
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

**Serie 11 (40 Punkte)**

**Aufgabe 1 (15 Punkte)**

Auf  $\mathbb{C}$  definiert man die folgenden Verknüpfungen:

$$z_1 \top z_2 := z_1 + z_2, \quad z_1 \perp z_2 := z_1 z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2.$$

Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{C}, \top, \perp)$  ein Ring ist und finden Sie alle invertierbare Elemente.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Sei  $(R, +, \cdot)$ , ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring und  $x, y \in R$  Elemente. Zeigen Sie: Ist  $1 - xy \in R$  invertierbar dann ist auch  $1 - yx$  invertierbar.

**Aufgabe 3 (15 Punkte)**

Beweisen Sie, dass die Menge aller Matrizen auf die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ , mit Addition und Matrixmultiplication ein Körper bildet, der isomorph zu  $\mathbb{C}$  ist.