HU Berlin Sommersemester 2012

Übungsaufgabe zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 14.05.2012 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

1. Bewiesen Sie durch vollständige Induktion:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i.$$

2. Begründen Sie: Ist p eine Primzahl, so gilt für alle m, $1 \leq m \leq p-1$: $\binom{p}{m} \equiv 0 \mod p$.
3. Folgern Sie: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$ (p Primzahl). Das heißt also, in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt: $(a+b)^p = a^p + b^p$.

q **Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

1. 42 ist Teiler von $m^7 - m$.
2. $\frac{m^5}{5} + \frac{m^3}{3} + \frac{7m}{15}$ ist eine natürliche Zahl.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n)$ ungerade?
2. Zeigen Sie, dass für alle zusammengesetzte Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 4$

$$(n-1)! \equiv 0 \mod n$$

gilt.