

Übungsaufgabe zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 21.05.2012 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (15 Punkte)

1. Geben Sie alle strukturell verschiedenen Gruppentafeln zu Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3 und 4 an.
2. Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3 . Welche davon sind zyklische Gruppen?

Aufgabe 2 (15 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) : \det(A) = 1\}$$

eine Gruppe ist, und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Gruppe für $n > 1$ nicht kommutativ ist.

2. Finden Sie in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ Elemente der Ordnung 2, das heißt Elemente $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma^2 = I_2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ eine Untergruppe U von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ bilden. Gilt $U \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?