HU Berlin Sommersemester 2012

Übungsaufgabe zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 25.06.2012 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Es sei K ein Körper, $s \in K$ und $K_s := \left\{ \begin{pmatrix} a & sb \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$. Zeigen Sie:

1. K_s ist ein kommutativer Teilring von $M_2(K)$. Wann ist K_s ein Körper?
2. $\mathbb{R}_{-1}$ ist zu $\mathbb{C}$ isomorph.
3. Für jede Primzahl $p \neq 2$ gibt es einen Körper mit p^2 Elementen.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Der *Quaternionenschiefkörper.* Zeigen Sie:

1. $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$ ist ein Teilring con $M_2(\mathbb{C})$.
2. Die Abbildung $\epsilon : z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{H}$ ist eine Einbettung (injektiver Ringhomomorphismus).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei R ein Ring der zumindest zwei Elemente enthält und die Eigenschaft besitzt, dass für jede $0 \neq a \in R$, ein eindeutig bestimmtes Element $b \in R$ gibt mit $aba = a$. Beweisen Sie:

1. R besitzt keinen Nullteiler.
2. $bab = b$.
3. R ist ein Schiefkörper.