Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2020-21, Blatt 1

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte) (a) Die folgenden vier Gruppen haben alle 12 Elemente:

- $G_1 := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
- $G_2 := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $G_3 := D_{12}$ (Die dihedrale Gruppe, d.h. die Gruppe erzeugt von zwei Elementen $\sigma, \tau \in D_{12}$, mit $\sigma^2 = 1$, $\tau^6 = 1$ und $\tau^5\sigma = \sigma\tau$.)
- $G_4 := A_4 := \{\sigma \in S_4 : \mathrm{sgn}(\sigma) = +1\}$.

Zeigen Sie, dass alle diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind.

(b) Sei G eine unendliche Gruppe. Zu zeigen: G besitzt unedlich viele Untergruppen.

2. (10 Punkte) (a) Sei G eine Gruppe, H ein Normalteiler in G und K ein Normalteiler in H. Ist dann auch K ein Normalteiler in G?

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ isomorph zu der Nullgruppe ist. Zeigen Sie dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ auch die Nullgruppe ist. Beschreiben Sie die Gruppe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$.

3. (10 Punkte) (a) Betrachte in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^*$ der von Null verschiedenen komplexen Zahlen die Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln. Zeige, dass $\mathbb{C}^*/\mu_n \cong \mathbb{C}^*$.

(b) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Gruppen isomorph sind:

$$\mathbb{C}^*/U \cong \mathbb{R}^*_+ \text{ und } \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*_+ \cong U.$$

4. (10 Punkte) (a) Sei G eine Gruppe und $H, K \leq G$ endliche Untergruppe. Zu zeigen:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

(b) Sei G eine endliche Gruppe und $H, K \leq G$ Untergruppen. Zu zeigen:

$$[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K].$$