Algebra und Funktionentheorie Wintersemester 2020-21, Blatt 10

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (i) Gegeben sei eine Körpererweiterung $K \subset L$. Bestimme das Minimalpolynom $\mathrm{Min}(a, K) \in K[X]$ des Elementes $a \in K$ in den folgenden Fällen:

$$L = \mathbb{C},\ K = \mathbb{Q},\ a = (i\sqrt{3} - 2)/2,$$
$$L = \mathbb{C},\ K = \mathbb{Q},\ a = (\sqrt{5} + 1)/2.$$

(ii) Man gebe den Zerfällungskörper L von $P := X^4 - 2X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$, zerlege P über L in Linearfaktoren und bestimme $[L : \mathbb{Q}]$.

2. Welche der folgenden Auusagen sind richtig?
(i) Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}})$ sind zueinander isomorph.
(ii) Der Grad des Zerfällungskörpers des Polynoms

$$X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$$

ist gleich vier.
(iii) Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sind zueinander isomorph.
(iv) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(X^3) \subseteq \mathbb{Q}(X)$ is normal.

3. Sei $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ algebraisch vom Grad n über $\mathbb{Q}$. Zeige:

- $[\mathbb{Q}[z, \bar{z}] : \mathbb{Q}[z + \bar{z}]] \geq 2$.
- $\mathrm{Re}(z)$ ist algebraisch vom Grad $\leq n(n-1)/2$ über $\mathbb{Q}$.

4. (i) Man überprüfe die folgenden Körpererweiterungen auf Normalität:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{2+\sqrt{2}}\big) \ \text{ und } \ \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{1+\sqrt{3}}\big).$$

(ii) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Ist K genau dann vollkommen, wenn der Frobeniusmorphismus $a \mapsto a^p$ surjektiv ist.

(iii) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Sei $L := K(X, Y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten X und Y und $M := K(X^p, Y^p) \subseteq L$. Bestimmen Sie $[L : M]$ und zeigen Sie, dass die Körpererweiterung L/M nicht einfach ist.