

Algebra und Funktionentheorie

Wintersemester 2020-21, Blatt 11

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1.

- Sei E ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $K \subset L$. Ist $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$, so ist

$$\text{Gal}(L/\sigma(E)) = \sigma \text{Gal}(L/E)\sigma^{-1}.$$

- Zeigen Sie, dass die folgenden Körpererweiterungen Galois sind und bestimmen Sie die entsprechenden Galoisgruppen:

$$K\left(\frac{X^2+1}{X}\right) \subseteq K(X) \quad \text{und} \quad K\left(\frac{X^2-(X+1)^3}{X^2(X-1)^2}\right) \subseteq K(X).$$

2. Gegeben sei das Polynom $g = X^6 + X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

- Bestimme den Zerfällungskörper L von g und die zugehörige Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$.
- Fasst man g als Polynom in $\mathbb{F}_5[X]$ auf, so hat dieses Polynom welche Galoisgruppe?

3. (10 Punkte)

- Sei $f(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Listen Sie alle Elemente der Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf, wobei L der Zerfällungskörper von f ist. Die selbe Aufgabe für das Polynom $f := X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
- Es seien E ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $L := E(X, Y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten X, Y und $K := E(X^p, Y^p) \subseteq L$. Zeigen Sie, dass $[L : K] = p^2$ und, dass L/K nicht einfach ist.

4.

- Sei $f(X) = X^p - X - a \in \mathbb{F}_p[X]$, wobei $a \in \mathbb{F}_p - \{0\}$. Sei L der Zerfällungskörper von f und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f . Zeige, dass $\alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + p - 1$ Nullstellen von f sind. Bestimme die Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{F}_p)$.
- Sei K ein Körper und $L := K(X)$. Bestimmen Sie den Fixkörper L^G , wobei G die zyklische Gruppe erzeugt von dem K -Automorphismus

$$K(X) \ni u(X) \mapsto u(X+1) \in K(X)$$

ist.