Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2020-21, Blatt 12

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte) (i) Man bestimme alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, für $n = 5, 7, 9$, wobei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(ii) Seien $n > 2$ und $h > 0$ natürliche Zahlen mit $\mathrm{ggT}(n, h) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\Big[\mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2h\pi}{n}\Big) : \mathbb{Q}\Big)\Big] = \frac{\phi(n)}{2}.$$

(iii) Sei K ein Körper der eine primitive n-te Einheitswürzel ϵ enthält. Sei $b \in \overline{K}$ eine Wurzel des Polynoms $X^n - a \in K[x]$. Dann ist die Galoisgruppe

$$G := \mathrm{Gal}(K(b)/K)$$

zyklisch und $|G|$ teilt n.

2. (10 Punkte)

(i) Sei K ein Körper der Charackteristic $p > 0$ und $f := X^p - X + a \in K[X]$ ein Polynom. Sei $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $K \subseteq K(\alpha)$ Galois ist und bestimmen Sie die entsprechende Galoisgruppe.

(ii) Man bestimme das Zyklotomische Polynom $P_{16}(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

(iii) Sei $K := \mathbb{F}_q$ und K_n der Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über K. Angenommen $\mathrm{ggT}(q, n) = 1$, zeigen Sie, dass $[K_n : K] = \mathfrak{o}$, wobei $\mathfrak{o}$ die Ordnung von $\overline{q} \in \big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot\big)$ bezeichnet.

3. (10 Punkte)

(i) Sei G eine endliche Gruppe. Dann existiert eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ mit $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$. Gilt die Auusage auch wenn K festgesetzt ist?

(ii) Es seien $\mathbb{Q} \subset K$ eine Körpererweiterung vom Primzahlgrad $p > 2$. Für den normalen Abschluss N von K gelte $[N : K] = 2$. Zeien Sie, dass $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}) \cong D_{2p}$.

4. (10 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein irreduzibles Polynom mir $\mathrm{grad}(f) = p$, wobei p eine Primzahl ist. Es wird weiter angenommen, dass f genau $p - 2$ reelle Nullstellen hat. Zu zeigen: $\mathrm{Gal}(f) \cong S_p$.