HU Berlin | Wintersemester 2020/21

Übungsaufgabe zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie 2020/21, Blatt 2

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 23.11.2020 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Man definiert das *Zentrum* der Gruppe G durch

$$Z(G) := \{a \in G \ : \ a \cdot g = g \cdot a, \text{ für alle } g \in G\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.
(b) Falls die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist, zeigen Sie, dass die Gruppe G abelsch ist.
(c) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(D_{2n})$ der Diedergruppe D_{2n}.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe und $H, K \subset G$ zwei Normelteilern von G. Falls G/H und G/K beide abelsche Gruppen sind, zeigen Sie, dass $G/(H \cap K)$ auch abelsch ist.
(b) Finden Sie eine unendliche Gruppe G in der jedes Element endliche Ordnung hat.
(c) Sei G eine endliche p-Gruppe. Zeigen Sie, dass $Z(G) \neq \{e\}$.
(d) Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^2. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Man betrachte die Menge

$$\mathbb{C}_{p^n} := \{z \in \mathbb{C}^* : z^{p^n} = 1\}.$$

(a) Zeigen Sie dass die folgende Kette von Inklusionen

$$1 = \mathbb{C}_{p^0} < \mathbb{C}_p < \mathbb{C}_{p^2} < \cdots < \mathbb{C}_{p^n} \cdots$$

gilt.
(b) Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{C}_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}_{p^n}$$

eine Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ ist, und jede Untergruppe von $\mathbb{C}_{p^\infty}$ auf der Form $\mathbb{C}_{p^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte) (a) Sei G eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ und $x, y \in G$ Elemente, sodass $x^2 = e$ und $xyx = y^3$. Beweisen Sie, dass $y^8 = e$.
(b) Sei G eine Gruppe, sodass es gilt $a^2 = b^2 = (ab)^2$, für alle $a, b \in G$. Dann gilt auch $a^4 = b^4 = (ab)^2$.
(c) Sei G eine Gruppe, sodass $\operatorname{ord}(x) = 2$, für alle Elemente $x \in G \setminus \{e\}$. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.