Algebra und Funktionentheorie, Wintersemester 2020/21, Blatt 3

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

Abgabetermin: 23.11.2020 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

1. (10 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe, $H \subset G$ ein Normalteiler, $f : G \to G/H$ die kanonische Projektion und $P \leq G$ eine p-Sylowgruppe. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

- Der Durschnitt $P \cap H \leq H$ ist eine p-Sylowgruppe von H.
- Das Bild $f(P) \leq G/H$ ist eine p-Sylowgruppe von G/H.

2. (10 Punkte) Sei $G = D_{2n}$ die Diedergruppe der Ordnung $\mathrm{ord}(G) = 2n$, mit $n \geq 3$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Es gibt genau eine zyklische Untergruppe $N \leq G$ vom Index $[G : N] = 2$.
- Es gibt genau n nichtzentrale Elemente $x \in G - Z(G)$ von Ordnung $\mathrm{ord}(x) = 2$.
- Sei $x \in G$ ein nichtzentrales Element mit $\mathrm{ord}(x) = 2$ und $H = \{e, x\}$ die davon erzeugte Untergruppe. Betrachtet man die Quotientmenge $X := G/H$. Dann ist der zur Multiplikationaktion $G \times X \to X$ gehörige Homomorphismus

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X) \quad g \mapsto (yH \mapsto gyH)$$

inkektiv.

3. (10 Punkte)

- Sei H eine p-Sylow Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Beweisen Sie, dass H die einzige p-Sylow Untergruupe der Normalisatorgruppe $N_G(H)$ ist.
- Man zeige, dass es keine einfache Gruppe G mit 50 Elementen gibt.

- Man zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 40 einen echten Normalteiler besitzt.

4. (10 Punkte)

- Wie viele 2-Sylowgruppen besitzt S_5?
- Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $2p$. Dann entweder ist G zyklisch oder isomorph zu der Diederuppe D_{2p}.
- Zeigen Sie, dass bis auf Isomorphie nur zwei nichtabelschen Gruppen der Ordnung 8 gibt. Beschreiben Sie diese Gruppen.
- Für eine endliche Gruppe G, sei $k(G)$ die Anzahl von Konjugationsklassen von G. Zeigen Sie:
$$k(G) = 3 \Leftrightarrow G \cong S_3 \text{ oder } G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$