Algebra und Funktionentheorie Wintersemester 2020-21, Blatt 4

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (8 Punkte) a) Zeigen Sie, dass die Transpositionen $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$ die symmetrische Gruppe S_n erzeugen. Zeigen Sie, dass die Transposition $(1,2)$ und der Zykel $(1,2,\ldots,n)$ die Gruppe S_n erzeugen.

(b) Betrachtet man die Zykeln

$$p := (3,4,5,2,1), q := (2,3,4,5,1), r := (4,5,3,1,2) \in S_5.$$

Bestimmen Sie die Permutation $x \in S_5$ mit $p \circ x \circ q = r$.

2. (10 Punkte) (i) Sei $H := \{\sigma \in S_3 : \sigma(3) = 3\}$. Zeigen Sie, dass $H \leq S_3$ und $H \cong S_2$. Ist H ein Normalteiler von S_3? Listen Sie alle links Nebenklassen xH, mit $x \in S_3$ auf.

(ii) Sei H ein Untergruppe von S_n mit $|S_n : H| = n$. Dann gilt $H \cong S_{n-1}$.

3. (10 Punkte) (a) Es sei Γ die von den Elementen $\omega = (123)(456)(789)$ und $\pi = (147)(258)(369)$ in S_9 erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

(b) Zeigen Sie, dass die von den Permutationen

$$\sigma = (2437)(5698) \text{ und } \tau = (2539)(4876)$$

erzeugte Untergruppe Δ von S_9 eine Gruppe von Ordnung 8 ist.

4. (12 Punkte) (a) Sei K ein Normalteiler einer endlichen Gruppe G. Ist $P \leq G$ eine p-Sylowgruppe von K ist, dann gilt

$$G = KN_G(P).$$

(b) Beweisen Sie, dass in der symmetrischen Gruppe S_4 keine Reihe von Untergruppen

$$1 = G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = S_4,$$

gibt, die besteht aus zyklischen Gruppen, so dass jede Untergrupe G_i Normalteiler von G ist.

(c) Bewiesen Sie, dass dagegen für jede endliche p-Gruppe eine solche aufsteigende Reihe von Untergruppen existiert.

(d) Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei nilpotenten Gruppen wieder nilpotent ist.