Algebra und Funktionentheorie, Wintersemester 2020/21, Blatt 5

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

Abgabetermin: 14.12.2020 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

1. (10 Punkte) Sei G eine Gruppe und $G' := [G, G] = \Gamma_1(G)$ die Kommutatorgruppe.

- Es gilt $S'_n = A_n$ für jedes $n \geq 1$.
- Es gilt $A'_n = A_n$ für jedes $n \geq 5$. Berechnen Sie A'_4.
- Sei $\mathcal{H}$ die Heisenberg-Gruppe aller reellen oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträge alle 1. Zeigen sie, dass $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = Z(\mathcal{H})$.

2. (10 Punkte)

- Es seien U eine Untergruppe und N ein Normalteiler einer Gruppe G. Dann gilt für alle natürliche Zahlen n:

$$U^{(n)} \subseteq G^{(n)} \text{ und } (G/N)^{(n)} \cong G^{(n)}/G^{(n)} \cap N \cong G^{(n)}N/N.$$

- Es sei N ein Normalteiler einer Gruppe G. Sind N und G/N auflösbar, so ist auch G auflösbar.
- Für welche n ist die Diedergruppe D_n auflösbar?

3. (10 Punkte) Für Elemente $x, y, z \in G$, sei $[x, y, z] := \big[[x, y], z\big] \in G$.

- Beweisen Sie, die folgende Version der Hall-Identität:

$$[y^{-1}, x^{-1}, x^{-1}z^{-1}x] \cdot [x^{-1}, z^{-1}, z^{-1}y^{-1}z] \cdot [z^{-1}, y^{-1}, y^{-1}x^{-1}y] = 1.$$

- Für eine Gruppe G, sei $G'' := [G', G']$, wobei G' die derivierte Gruppe von G ist. Zeigen Sie, dass G/G'' auflösbar der Klasse 2 ist. Ist auch G/G'' niloptent? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel.

- Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse 3. Dann ist die derivierte Gruppe G' abelsch.

4. (10 Punkte)

- Bestimmen Sie die Anzahl nichtisomorpher abelscher Grupppen der Ordnung 360.

- Bestimmen Sie die höheren Kommutatorgruppen $Q^{(n)}$ der Quaternionengruppe Q (der Ordnung 8 und erzeugt von zwei Elementen $a, b \in G$ mit Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$ und $a^{-1} = bab^{-1}$).

- Seien H und K nilpotente Gruppe der Klasse m bzw. n. Dann ist $G := H \times K$ wieder nilpotent und ihre Klasse ist $\max\{m, n\}$.