Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2020/21, Blatt 6

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte)

• Wie viele nicht-isomorphe Ringstrukturen lassen sich auf eine Menge mit vier Elementen definieren?
• Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie einen kommutativen Ring R der genau n Ideale besitzt.
• Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Seien $a \in R^*$ invertierbar und $b \in R$ ein nilpotentes Element (d.h., dass $b^n = 0 \in R$, für ein $n \in \mathbb{N}$). Dann ist $a + b$ auch invertierbar.

2. (10 Punkte)

• Sei R ein unitärer Ring (nicht unbedingt kommutativ!) und $a, b \in R$. Zeigen Sie: Ist $1 - ab \in R$ invertierbar, dann ist $1 - ba \in R$ auch invertierbar.
• Sei R ein Ring. Bezeichnet man das Zentrum

$$Z(R) := \{x \in R : xa = ax, \quad \text{für jedes } a \in R\}.$$

Zu zeigen: Ist $a^2 - a \in Z(R)$ für jedes $a \in R$, dann ist R kommutativ.

3. (10 Punkte)

• Sei R ein Integritätsbereich und $(R^*, \cdot)$ die Gruppe aller invertierbaren Elemente. Zu zeigen: jede endliche Untergruppe $H \leq R^*$ ist zyklisch.
• Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ die Menge allen Nullteiler von R. Bildet I ein Ideal von R?
• Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und I, J Ideale von R. Dann, gilt

$$S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J \ \text{ und } S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J.$$

4. (10 Punkte)

• Sei $p > 2$ eine Primzahl und G eine p-Gruppe der Nilpotenzklasse 2. Dann bildet die Menge

$$\{x \in G : x^p = 1\}$$

eine Untergruppe von G.
• Sei G eine nilpotente Gruppe und $H < G$ einen echten Normalteiler. Dann gilt,

$$H \cap Z(G) \neq 1.$$