Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2020/21, Blatt 7

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte)

• Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl mit $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$. Zu zeigen: im Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ ist das Element 2 irreduzibel aber kein Primelement.
• Sei R ein faktorieller Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Dann ist $S^{-1}R$ auch faktoriell. Gilt die Umkehrimplikation auch?
• Falsch oder richtig? Ist R ein faktorieller Ring und $R' \subseteq R$ ein Unterring, dann ist auch R' faktoriell.

2. (10 Punkte)

• Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ euklidisch ist.
• Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ euklidisch ist.

3. (10 Punkte)

• Ist p eine Primzahl mit $p \equiv 3 \mod 4$, so ist p ein Primelement von $\mathbb{Z}[i]$.
• Ist p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \mod 4$, so existiert ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $p | x^2 + 1$.
• Jede Primzahl $p \equiv 1 \mod 4$ ist-von der Reihefolge der Summanden abgesehen-auf genau eine Weise als Summer zweier ganzzahliger Quadrate darstellbar, also $p = a^2 + b^2$.

4. (10 Punkte)

• Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 4 bzw. $18 + 36i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$.
• Zeigen Sie, dass das Ideal $(7, X^2 + 1) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ maximal ist.
• Zeigen Sie, dass die Elemente 9 und $3(2 + i\sqrt{5})$ aus $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ kein kgV besitzen.
• Man begründe: Die Elemente $2, 3, 4 + \sqrt{10}$ und $4 - \sqrt{10}$ sind im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ irreduzibel, aber keine Primelemente.