Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2020/21, Blatt 8

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte)

• In einem kommutativen Ring R, ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, falls $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: ein Polynom $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in R[X]$ ist nilpotent, genau dann wenn alle Koeffizienten a_i nilpotent in R sind.
• Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Polynom $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in R[X]$ ist invertierbar, genau dann wenn $a_0 \in R^*$ und $a_1, \ldots, a_n \in R$ nilpotente Elemente sind.
• Sei R ein faktorieller Ring und $K := Q(R)$ der zugehörige Quotientenkörper. Für ein primitives Polynom $f \in R[X]$ vom Grad ≥ 1, gilt die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist irreduzibel in } R[X] \Longleftrightarrow f \text{ ist irreduzibel in } K[X].$$

2. (10 Punkte)

• Sei K ein Körper. Zu zeigen: Der Ring $K[Y, Z]/(Z^2)$ ist isomorph zu einem Unterring von $K[X, Y, Z]/(X^2, XY - Z)$.
• Zeigen Sie, dass $K[X, Y](Y^2 - X^2 - X^3)$ ein Integritätsbereich ist, dessen Quotientenkörper isomorph zu $K(Z)$ ist. Hier $K(Z)$ bezeichnet der Quotientenkörper des Ringes $K[Z]$ ist.

3. (10 Punkte)

• Sei R ein Hauptidealring und $\pi \in R$ ein irreduzibles Element. Zu zeigen: $R/\pi^n R$ ist ein lokaler Ring dessen maximal Ideal $R\pi/R\pi^n$ ist.
• Sei K ein Körper und $R := K[X, Y, Z, T]$. Dann gilt:

$$(XZ - X^2, YT - Z^2) = (Z, Y) \bigcap (XZ - Y^2, YT - Z^2, XT - YZ).$$

• $(XZ - Y^2, YT - Z^2)$ kein Primideal von R ist.

4. (10 Punkte)

• Sei R ein faktorieller Ring und $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in R[X]$. Sei $\pi \in R$ ein Primelement, sodass ein $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gibt mit:
(i) $\pi | a_0, \pi | a_i, \ldots, p | a_{k-1}$
(ii) π kein Teiler von a_k ist, und
(iii) π^2 kein Teiler von a_0 ist.

Zu zeigen:

In der Primfaktorenzerlegung von $f \in R[X]$, taucht ein irreduzibles Polynom vom Grad $\geq k$ auf.

- Das Polynom $f = X^5 + 15X^4 + 20X^3 - 40X + 35 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.
- Das Polynom $f = X^n + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.