Algebra und Funktionentheorie
Wintersemester 2020/21, Blatt 9

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. (10 Punkte)

• Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Zeige: Sind α, β, γ die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$, so gilt $\alpha + \beta + \gamma \in \mathbb{Q}$ und $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \in \mathbb{Q}$.

• Man zeige, dass das Polynom $f = X^4 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

• Zu zeigen: Das Polynom $P = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist, obwohl

$$\overline{P} = X^4 - \overline{10}X^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$$

für jede Primzahl p reduzibel ist.

2. (10 Punkte)

• Sei K ein Körper und $a := \frac{X^3}{X^2+1} \in K(X)$. Ist die Erweiterung $K(a) \subseteq k(X)$ algebraisch? In diesem Fall, was ist der Grad dieser Erweiterung?

• Es sei $a \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von

$$P := X^5 - 2X^4 + 6X + 10 \in \mathbb{Q}[X].$$

Man bestimme $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$. Zu jedem $r \in \mathbb{Q}$ gebe man $\mathrm{Min}(a + r, \mathbb{Q})$.

• Sei $K \subseteq L$ ein Körpererweiterung. Ein element $x \in L$ das nicht algebraisch über K heißt transzendent. Welche dieser Aussagen sind zutreffend?

Sind $a, b \in L$ transzendente Elemente über K, dann sind $a + b$ sowie $a \cdot b$ wieder transzendent. Ist $a \in L$ ein algebraisches Element und $b \in L$ trnszendent, dann sind die Elemente $a + b$ und $a \cdot b \in L$ wieder transzendente Elemente.

3. (10 Punkte)

• Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Begründen Sie: $\mathbb{R}[X]/(f)$ ist kein Körper.

• Es seien p, q Primzahlen, $p \neq q$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p},\ {}^3\sqrt{q})$. Man zeige $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

4 (10 Punkte)

• Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$ und beschreiben Sie eine Basis von K über $\mathbb{Q}$. Stellen Sie das Element $\sqrt{54} + 7\sqrt{2} \in K$ in dieser Basis dar.

• Beweisen Sie, dass das Polynom $f := X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Insbesondere, zeigen Sie, dass für jede $n \geq 1$, eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$ der Grad n existiert.

• Sei K ein Körper. Zu zeigen: Der Körper aller rationalen Abbildungen $K(X) := Q(K[X])$ ist kein algebraisch abgeschlossener Körper.