Prof. Gavril Farkas
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 401

Übungsblatt 9

Lineare Algebra und analytische Geometrie I- W 2008-2009

Abgabe 13.01.2009

Aufgabe 1
In dieser Aufgabe sind alle Matrizen über $K = \mathbb{R}$ definiert.

a) Berechnen Sie sämtliche Potenzen A^n und B^k $(k, n, \in \mathbb{N})$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ -25 & 11 & -5 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ heisst *obere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt. M_1 und M_2 seien $n \times n$ obere Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie: $M_1 \cdot M_2$ und $M_2 \cdot M_1$ sind obere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 2
Untersuchen Sie jeweils, falls $V = U \oplus W$ für die folgenden Fälle gilt:

a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - 4z + t = 3x - y - z - t = 0\}$, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - 5z - 2t = x - 4y + z + t = 0\}$.

b) $V = Mat(n; \mathbb{R})$, $U = \{A = (a_{ij}) \in Mat(n; \mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ für } i \leq j\}$, $W = \{A = (a_{ij}) \in Mat(n; \mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\}$

c) $V = Mat(n; \mathbb{R})$, $U = \{A \in Mat(n; \mathbb{R}) : A^t = A\}$, $W = \{A \in Mat(n; \mathbb{R}) : A^t = -A\}$.

d) $V = \mathbb{R}[X]$, $U = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : p(-X) = p(X)\}$ (d.h., die Polynome in U sind *gerade*), $W = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : p(-X) = -p(X)\}$ (d.h., die Polynome in U sind *ungerade*).

Aufgabe 3

a) Sei $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung für welche

$$\phi((1,0,0,0)) = 1 \qquad \phi((1,-1,0,0)) = 0$$
$$\phi((1,-1,1,0)) = 1 \qquad \phi((1,-1,1,-1)) = 0.$$

Bestimmen Sie $\phi((a, b, c, d))$. Bitte begründen Sie ihre Anwort!

b) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, die durch

$$T((x, y, z)^t) = (x + y, x - z, 2y + 3z, -x + 5z)^t$$

definiert ist. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_A^B(T)$, wobei die Basen A (bzw. B) für $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^4$) sind

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \ B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 4
Sei V ein endlichdimensional Vektorraum, und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung, mit $\phi^2 = 0$. Zeigen Sie:

a) $Im(\phi) \subseteq Ker(\phi)$,

b) $rang(\phi) \leq n/2$.