HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Gavril Farkas
P. Larsen
C. Falk

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 22.1.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra 1*
Serie 11

Abgabe: bis 28.1.2009

---

1. **Lineare Gleichungen in Primkörpern [10 P]:** Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 6 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ und $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^4$.

2. **Interpolationspolynome [10 P]** Es sei $M = \{(0,0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\frac{3}{2}\pi, -1), (2\pi, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

   1. Zeigen Sie: Es gibt genau ein Polynom dritten Grades $P \in \mathbb{R}[X]$ gibt, sodass $P(x_i) = y_i$ für alle $(x_i, y_i) \in M$ gilt. Berechnen Sie dieses!
   2. Für die Menge $M = \{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,4}$ betrachte man die Polynome
   $$B_i = \prod_{k=1, k\neq i}^{4} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \quad i = 1, \ldots, 4.$$
   Zeigen Sie anhand der Werte $B_i(x_j)$ und mit Erstens, jedoch ohne direktes Nachrechnen, dass es sich bei $B = \{B_1, \ldots, B_4\}$ um eine Basis von $V = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid deg(P) \leq 3\right\}$ handelt und bestimmen Sie bezüglich derer die Koordinaten von P aus Erstens.

3. **Quadratische Splines [10 P]:**

   1. Zeigen Sie: Für zwei gegebenen Paare $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \subset \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei $x_1 \neq x_2$ gelten soll, gibt es genau ein quatratisches Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ mit den Eigenschaften: $P(x_i) = y_i$ für $i \in \{1,2\}$ und $P'(x_1) = \alpha$. Bestimmen Sie dieses!
   2. Man betrachte die Punktmenge $M = \{(x_i, y_i)\}_{i=0,\ldots,3}$ aus Aufgabe 2. Konstruieren Sie mit Hilfe von Teil 1 die eindeutigen Polynome $\{P_i\}_{i=0,1,2}$ mit den Eigenschaften $P_i(x_i) = y_i$, $P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ sowie $P_i'(x_i) = (P_{(i-1)\,mod\,3})'(x_{(i-1)\,mod\,3})$.

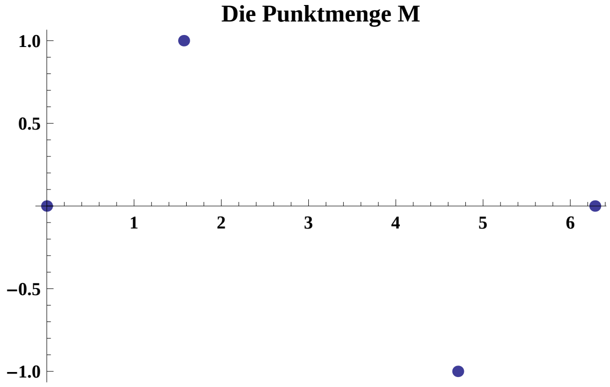
4. **Determinanten [10 P]:** Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

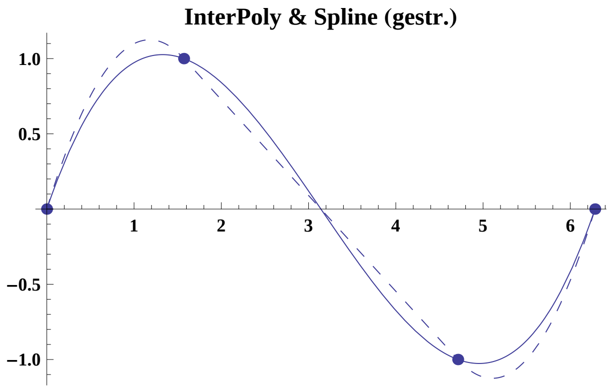
sowie die Determinante der 4×4 Matrix aus Aufgabe 1 im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Bemerkung

In der zweiten und dritten Aufgabe geht es um die Interpolation von diskreten Punktmengen (diskret heißt, alle Elemente sind voneinander isoliert). Konkret beschäftigt man sich damit, für die Punktmenge M



eine Funktion zu finden, deren Graph alle Elemente von M beinhaltet. Eine Möglichkeit dazu ist das sogenannte Interpolationspolynom aus Augabe 2. Dabei muss man im Allgemeinen für n vorgegebene Punkte ein LGS vom Rang n lösen, oder man bedient sich z.B. der "Lagrangebasis" B aus Aufgabenteil 2.2, was bei größeren Systemen erheblich weniger Aufwand macht.
Eine weitere Möglichkeit der Interpolation ist die Verwendung von Splines, in diesem Fall waren es quadratische Splines (Aufgabe 3). Dazu verbindet man die diskreten Punkte durch Polynome vom Grad 2 (oder höher) und bestimmt die freien Parameter so, dass die resultierende Gesamtfunktion eine stetige Ableitung (oder stetige höhere Ableitungen) besitzt . Für dieses konkrete Beispiel erhält man:



Welche qualitativen Unterschiede zwischen diesen Verfahren liegen, erfährt man in der Vorlesung "Numerik".

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr., Übungsgr. versehen! ⚠