Prof. Gavril Farkas
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 401

Übungsblatt 12

Lineare Algebra und analytische Geometrie I- W 2008-2009

Abgabe 4.02.2009

Aufgabe 1
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A über $\mathbb{R}$ in Abhangigkeit von den Parametern s, t.

$$A = \begin{pmatrix} t+7s & -t+5s & 4t-2s \\ 5t-6s & 2t-4s & -t+6s \\ 3t-3s & t-s & 2s \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden komplexen Matrizen:

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1-i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 2i & 2i & 2i \\ 2i & 2 & -1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix},$$

und der folgenden Matrizen über K:

c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

d)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden $n \times n$ Matrizen durch Induktion über n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4
A sei $n \times n$ Matrix über einen Körper, K, und es gebe eine Zerlegung von A in vier Teilmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

so dass B_{11} und B_{22} quadratische Matrizen sind.

a) Zeigen Sie: Ist B_{12} oder B_{21} eine Nullmatrix, so gilt

$$\det(A) = \det(B_{11}) \det(B_{22}).$$

b) Zeigen Sie: Ist B_{11} invertierbar, so gilt

$$\det(A) = \det(B_{11}) \det(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}).$$