HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Gavril Farkas
P. Larsen
C. Falk

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 27.10.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra 1*
Serie 2

Abgabe: bis 5.11.2008

---

1. **Operationen einer endlichen Menge [4+3+3P]:** Es sei M eine Menge mit n Elementen. Man berechne die Anzahl

   a) aller Operationen,

   b) der kommutativen Operationen und

   c) der kommutativen Operationen mit neutralem Element auf M.

2. **Monoide [5+5 P]:** Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Tupeln um Monoide handelt:

   a) $(\mathbb{R}^2, \star)$ mit $(x_1, y_1) \star (x_2, y_2) := (x_1 x_2, x_2 y_1 + y_2)$ und

   b) $(\mathbb{Z}^2, \heartsuit)$ mit $(x_1, y_1) \heartsuit (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

   Erinnerung: Ein Monoid ist eine Menge mit einer assoziativen Operation und Einselement.

3. **Gruppen [4+6 P]:** Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Tupeln um Gruppen handelt und finden sie gegebenenfalls die maximale Teilmenge, welche mit der Einschränkung der Operation eine Gruppe bildet.

   a) Die Menge $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Operation $\heartsuit$ aus Aufgabe 2b) und

   b) $(\mathbb{R}^4, \circ)$ mit

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) := (x_1 y_1 + x_2 y_3, x_1 y_2 + x_2 y_4, x_3 y_1 + x_4 y_3, x_3 y_2 + x_4 y_4).$$

4. **Gruppen [5+3+2 P]:** Sei $G = \mathscr{P}(X)$ die Potenzmenge einer nicht leeren Menge X. Finde Operationen $*$ auf G mit den jeweils folgenden Eigenschaften:

   a) Das Tupel $(G, *)$ ist eine Gruppe.

   b) Es existiert ein $e \in G$ sowie ein $\hat{g} \in G$, sodass $g * e = g$ für alle $g \in G$, sowie $e * \hat{g} \neq \hat{g}$.

   c) Mindestens ein Element hat kein Inverses, aber nicht alle.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. versehen! ⚠