Lineare Algebra und and analytische Geometrie, Blatt 4

1.

- Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenmorphismus und $N \subset G'$ ein Normalteiler von G'. Beweisen Sie dass $f^{-1}(N)$ ist auch ein Normalteiler von G.

- Sei G eine Gruppe, N ein zyklischer Normalteiler von G und $H \subset N$ eine Untegruppe von N. Zeigen Sie dass H ist ein Normalteiler von G.

2. Sei G eine Gruppe und $H, K \subset G$ Untergruppen. Beweisen Sie dass die Vereinigung $H \cup K$ ist eine Untergruppe von G genau wenn $H \subset K$ oder $K \subset H$.

3. Finden Sie einen Normalteiler N von der symmetrische Gruppe S_4, sodass die Faktorgruppe S_4/N isomorph zu der symmetrische Gruppe S_3 ist.

4. Für eine Gruppe G definieren wie die Teilmenge

$$Z(G) := \{g \in G : g \cdot x = x \cdot g, \text{ für alle } x \in G\}.$$

- Zeigen Sie dass $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G.

- Für die dihedrale Gruppe $G = D_n := \{1, r, \ldots, r^{n-1}, \tau, \tau r, \ldots, \tau r^{n-1}\}$ mit $\tau, r \in D_n$ sodass $\tau^2 = 1$, $r^n = 1$ und $r\tau = \tau r^{n-1}$, beschreiben Sie die Untergruppe $Z(G)$.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!