HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Gavril Farkas
P. Larsen
C. Falk

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 18.11.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra 1*
Serie 5

Abgabe: bis 26.11.2008

---

1. **Ideale und Faktorringe [10 P]:** Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein Unterring $I \subset R$ heißt *beidseitiges Ideal*, falls $R \cdot I = I \cdot R = I$ gilt.

   1. Sei $f : \overline{R} \to R$ ein Homomorphismus von Ringen und $I \subset R$ ein beidseitiges Ideal. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1}(I) \subset \overline{R}$ ein beidseitiges Ideal ist.
   2. Zeigen Sie, dass

      $$(a+I) \oplus (b+I) := (a+b)+I \text{ und } (a+I) \odot (b+I) := (a \cdot b)+I$$

      eine Ringstruktur auf R/I definiert, für die die Projektion

      $$\pi : (R, +, \cdot) \to (R/I, \oplus, \odot)$$

      ein Ringhomomorphismus ist.

2. **Homomorphiesatz für Ringe [10 P]** Seien R_1 und R_2 zwei Ringe und $f : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

   1. $Ker\, f = \{x \in R_1 \mid f(x) = 0\}$ ein beidseitiges Ideal.
   2. $Im\, f \subset R_2$ ist ein Unterring.
   3. $R/Ker\, f$ ist als Ring isomorph zu $Im\, f$.

3. **Beispiele für Faktorringe [10 P]:**

   1. Man betrachte das Polynom $f = X^2 + 1$ aus dem (kommutativen) Polynomring $R = \mathbb{R}[X]$. Es sei I das von f erzeugte beidseidige Ideal

      $$I = R \cdot f \cdot R = R \cdot f.$$

      Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[X]/I$ als Ring isomorph zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist und geben Sie diesen Isomorphismus an. Insbesondere ist damit $\mathbb{R}[X]/I$ ein Körper.
   2. Sei I das von $X^3 - 2$ erzeugte beidseitige Ideal in $\mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie, dass der Faktorring $\mathbb{Z}[X]/I$ isomorph zu $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ ist.

4. Gleichungssysteme in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [10 P]:

1. Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   Für eine Primzahl p sei $L_p \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ die Lösungsmenge des Gleichungsystems, das durch Reduktion $mod\, p$ entsteht. Man bestimme L_2 und L_3.

2. Lösen Sie die Gleichung

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

   in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $p = 5$ und $p = 7$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr., Übungsgr. versehen! ⚠