HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Gavril Farkas
P. Larsen
C. Falk

../../../DOKUME\unhbox

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 13.12.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra 1*
Serie 8

Abgabe: bis 7.1.2009

---

1. **Basen und Koordinaten [10 P]:** Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sowie $B_1 = \{b_1, b_2, b_2, b_4\} \subset \mathbb{K}[X]$ und $B_2 = \left\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_2, \overline{b}_4\right\} \subset \mathbb{K}[X]$ mit

$$b_i = (X-(i-1))^3 \quad \text{und } \overline{b}_i = \sum_{k=0}^{i-1} X^k \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Zeigen sie, dass es sich bei B_1 und B_2 um Basen von $V = span\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq 3\}$ handelt. Bestimmen Sie die Koordinaten von

$$f(X) = X + 2X^2 + X^3$$

bezüglich B_1 und B_2.

2. **Basistransformation [10 P]** Es sei $B_3 = \{1, X, X^2, X^3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V aus Aufgabe 1 (mit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) und B_1, B_2 wie in Aufgabe 1. Geben Sie die Basiswechselmatrizen $M^{B_2}_{B_1}(Id)$, $M^{B_3}_{B_2}(Id)$ und $M^{B_3}_{B_1}(Id)$ an. Dabei ist bekanntlich $M^{B_1}_{B_2}(Id) = \left\{\lambda_{ij}\right\}$ die Matrix (i ist der Zeilenindex und j der Spaltenindex), deren Einträge die Eigenschaft

$$Id(b_i) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ji} \overline{b}_j$$

erfüllen (analog $M^{B_3}_{B_2}(Id)$ und $M^{B_3}_{B_1}(Id)$). Wie hängen diese Matrizen untereinander zusammen?

3. **Lineare Abbidungen Teil 1 [10 P]:**

   1. Es seien V und $\mathbb{K}$ wie in Aufgabe 1. Welche der folgenden Abbildungen $F_i : V \to V$ sind $\mathbb{K}$-linear:
      (a) $F_1 : f(X) \mapsto (X-1)f^{'}(X) + f(1)$.
      (b) $F_2 : f(X) \mapsto X^2 f^{''}(X) + f^{'}(X) + f(0)$.
      (c) $F_3 : f(X) \mapsto (f^{'''}(X))^2 + f(0)$.

      Bestimmen Sie für die linearen Abbildungen die Abbildungsmatrix $M^{B_1}_{B_1}(F_j)$ bezüglich der Basis B_1 aus Aufgabe 1.
   2. Man betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Finden Sie einen echten Unterraum $U \subsetneq V$, der Isomorph zu V ist.

3. Lineare Abbildungen Teil 2 [10 P]: Es seien X_1, X_2 und V $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie:

1. Jede $\mathbb{K}-$lineare Abbildung $f : X_1 \mapsto X_2$ induziert durch

$$\begin{aligned} f^* : Hom_{\mathbb{K}}(X_2, V) &\longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(X_1, V) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_* : Hom_{\mathbb{K}}(V, X_1) &\longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(V, X_2) \\ \varphi &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

   lineare Abbildungen auf den Homomorphismenräumen, für die $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ und $\left(f \circ g\right)_* = f_* \circ g_*$ erfüllt ist.

2. Ist $f : X_1 \mapsto X_2$ injektiv, dann ist f_* injektiv und f^* surjektiv.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr., Übungsgr. versehen! ⚠