HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Gavril Farkas
P. Larsen
C. Falk

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 16.12.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra 1*
Fakultativ

Abgabe: bis 07.01.2009

---

1. **Quadratische Gleichungen [5+5 P]:** Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 2x+5y &= 6 \\ 3xy-1 &= -5 \quad \text{in } \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2x-6y &= -1 \\ xy+5 &= 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sie können zur Lösung die Äquivalenz

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad a,b,c \in \mathbb{K}$$

benutzen. Dabei sind $\sqrt{d}$ für $d \in \mathbb{K}$ die Nullstellen des Polynoms X^2-d in $\mathbb{K}[X]$. So ist z.B. $\sqrt{1}$ in $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Menge $\sqrt{1} = \pm 4 = \{1,4\}$.

2. **Quaternionen [10 P]:** Nachdem wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kennengelernt haben, wird es nun Zeit für die Quaternionen $\mathbb{H}$. Deren Konstruktion ist ziemlich analog zu der der komplexen Zahlen. Es sei $\mathbb{H}$ die Menge

$$\mathbb{H} = \left\{ z_1 + z_2 j \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Darauf betrachte man die Abbildungen

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (z_1+z_2 j),(w_1+w_2 j) &\longmapsto (z_1+w_1)+(z_2+w_2)j \end{aligned}$$

und $\odot : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, welche durch das formale Ausmultiplikation und den Forderungen $j^2=-1$ und $ij=-ji$ gegeben ist. Zudem soll j mit reellen Zahlen kommutieren, d.h. $ja = aj$, falls $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, \oplus, \odot)$ auf diese Weise zu einem *Schiefkörper* wird, d.h., bis auf die Kommutativität der Multiplikation $\odot$ sind alle Eigenschaften eines Körpers erfüllt.

3. **Die dreidimensionale Sphäre [10 P]:** Wir kennen schon die nulldimensionale Sphäre $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$. Auch die $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ ist seit dem zweiten Aufgabenblatt nicht mehr unbekannt. Auf beiden existiert eine Gruppenstruktur, und zwar als Untergruppe von $(\mathbb{R}, \cdot)$ bzw. $(\mathbb{C}, \cdot)$. Analog soll dies nun für die dreidimensionale Sphäre

$$S^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$$

gezeigt werden. Dazu betrachte man die Abbildung

$$\begin{aligned} {}^* : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ z = z_1 + z_2 j &\mapsto z^* := \overline{z}_1 - z_2 j, \end{aligned}$$

wobei mit $\overline{z}_1$ die zu z_1 komplex-konjugierte Zahl gemeint ist. Man nennt diese Abbildung auch die quaternionische Konjugation. Zeigen Sie:

- $(z \oplus w)^* = z^* \oplus w^*$ und $(z \odot w)^* = w^* \odot z^*$ für alle $z, w \in \mathbb{H}$. (Bemerkung: Die Abbildung * ist demnach kein Ringhomomorphismus, da bei der Multiplikation die Reihenfolge vertauscht wird.)
- Die Abbildung

$$\begin{aligned} N : (\mathbb{H}, \odot) &\to (\mathbb{R}, \cdot) \\ z &\mapsto z \odot z^* \end{aligned}$$

  ist ein Gruppenhomomorphismus.

Leiten Sie dann aus $S^3 = N^{-1}(1)$ ab (zu zeigen!), dass es sich bei $(S^3, \odot) \subset \mathbb{H}$ tatsächlich um eine Untergruppe handelt.

4. **Ringhomomorphismen auf Körper**n **[5 P]:** Zeigen Sie: Jeder Ringhomomorphismus $f : \mathbb{K} \to R$ auf einem Körper $\mathbb{K}$ in einen Ring R ist entweder injektiv, oder die Nullabbildung.

Achtung. Diese Aufgaben dürfen nicht in Gruppen abgegeben werden! Meldet Euch bei Fragen bitte unter falk@mathematik.hu-berlin.de.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr., Übungsgr. versehen! ⚠