HU Berlin Sommersemester 2015

Übungsblatt 3
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 11.05.2015 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

(a) (10 Punkte) Es sei $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ ist eine diagonalisierbare Matrix, d.h. es gibt eine Diagonalmatrix $B \in M(n \times n; \mathbb{R})$ und eine invertierbare Matrix $S = GL(n; \mathbb{R})$ mit $A = S^{-1}BS$. Zeigen Sie, dass für alle reellen Polynome p es gilt

$$p(A) = S^{-1}p(B)S\,.$$

(für einen Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ und eine Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ definieren wir $p(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \ldots$).

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Hinweis: Man kann a) oder Induktion benutzen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Triagonalisieren Sie die folgenden reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie zuerst, dass es möglich ist und geben Sie die Matrix eines Basiswechsels an.

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definieren wir

$$e^A \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 \ldots\,.$$

Beweisen Sie, dass für alle reellen Polynome p und alle Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{R})$, $p(e^{AB})$ ist genau dann nilpotent, wenn $p(e^{BA})$ nilpotent ist (eine Matrix A ist nilpotent, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ existiert).

a) Zeigen Sie zuerst, dass für alle reellen Polynome p und eine Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$

$$p(e^A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i \,,$$

mit $c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, ...$

b) Beweisen Sie, dass für alle Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{R})$ die charakteristischen Polynome von AB und BA übereinstimmen. Dann zeigen Sie, dass für alle reellen Polynome p die charakteristischen Polynome von $p(e^{AB})$ und $p(e^{AB})$ auch die gleiche sind.

c) Beweisen Sie die Aussage mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton.