HU Berlin Sommersemester 2013

Übungsblatt 4
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 18.05.2015 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle Partitionen der Zahl 5 und geben Sie die zugehörigen Kastendiagramme / Young-Diagramme an.

(b) (5 Punkte) Sei K ein Körper. Klassifizieren Sie mit Hilfe von (a) alle nilpotenten Endomorphismen $f : K^4 \to K^4$ (bis auf Ähnlichkeit).

(c) (10 Punkte) Zeigen Sie: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

entspricht der Partition $p = (2\ 2)$, d.h. die Matrizen A und $N((2\ 2))$ sind ähnlich, wobei

$$N((2\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix $S \in GL(4; \mathbb{R})$, für die gilt

$$S^{-1}AS = N((2\ 2)).$$

Aufgabe 2

(a) (10 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie: Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f^2 = 0$ gilt

$$\dim(\text{Bild}(f)) \leq \frac{n}{2}.$$

(b) (10 Punkte) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $2m \leq n$. Konstruieren Sie einen Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ mit

$$f^2 = 0 \quad \text{und} \quad \dim(\text{Bild}(f)) = m.$$