HU Berlin Sommersemester 2015

Übungsblatt 6
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 8.06.2015 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1

Mit Hilfe des Satzes über Jordansche Normalform kann mann recht einfach hohe Potenzen von Matrizen berechnen. Wir haben gesehen, dass für eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$, $S \in GL(n, K)$ und $m \in \mathbb{N}$, $(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}$ gilt. Zeigen Sie:

(a) (5 Punkte) Sind $A, B \in M(n \times n; K)$, mit $AB = BA$ und $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} .$$

(b) (15 Punkte) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in GL(3, \mathbb{R})$, so dass $A = S(D + N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent und $DN = ND$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe von a) A^{50}.

Aufgabe 2

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis, bezüglich der die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R}$$

Jordansche Normalform hat, und geben Sie jeweils das charakteristische und das Minimalpolynom an.

(b) (5 Punkte) Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V mit dem charakteristischen Polynom $p_F(t) = (t - 1)(t + 2)^5$ und Minimalpolynom $m_F(t) = (t - 1)(t + 2)^2$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von F.

(c) (5 Punkte) Zeigen Sie: Zwei 5×5-Matrizen mit dem charakteristischen Polynom p sind genau dann ähnlich, wenn ihre Minimalpolynome übereinstimmen.