

Übungsblatt 7

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 15.06.2015 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe I (20 Punkte)

(1) Wir definieren in \mathbb{R}^3 die bilineare Form

$$g(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

- (a) Geben Sie die zu f gehörige quadratische Form q an.
 (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{K}}(f)$ bezüglich der Kanonischenbasis.
 (c) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)$ bezüglich der Basis des \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (1, 4, 9), (1, 8, 27)\}.$$

(2) Welche der folgenden Abbildungen $f : K^2 \rightarrow K$ sind Bilinearformen?

1. $f(x, y) = x + y$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $f(x, y) = xy$
4. $f(x, y) = xy^2$

Aufgabe II (20 Punkte)

(1) Sei (V, \langle, \rangle) ein Euklidischer Vektorraum mit der Norm definiert durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

für alle $v, w \in V$. Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2,$$

für alle $v, w \in V$.

(2) Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform mit zugehörige quadratische Form $q : V \rightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$s(v, w) = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w) + iq(v + iw) - iq(v - iw))$$

gilt.

(3) Sei $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und V ein K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform $f : V \times V \rightarrow K$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_1 + f_2$$

besitzt, wobei $f_1 : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform und $f_2 : V \times V \rightarrow K$ eine schiefsymmetrische Bilinearform ist.