HU Berlin Sommersemester 2015

Übungsblatt 8
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 22.06.2015 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte) Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um eine Orthonormalbasis zu folgenden euklidischen Vektorraum zu finden

$$V = \mathrm{Span}\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) (7 Punkte) Finden Sie eine orthogonale Matrix P, so dass $P^T AP$ diagonal ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) (5 Punkte) Ergänzen Sie den Vektor $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts.

Aufgabe 2

(a1) (10 Punkte) Sei $\mathrm{Spur} : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die einer Matrix $A = (a_{i,j})$ die Summe der diagonalen Elemente zuordnet, das heißt $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A \cdot B^T)$$

(wobei B^T die Transponierte von B ist) ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{R})$ definiert wird.

(a2) (5 Punkte) Sei $B_{i,j}$ die Matrix mit 1 als (i, j)-Eintrag und alle anderen Einträge 0. Zeigen Sie, dass die $B_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$ eine Orthonormalbasis bezüglich des in (a1) definierten Skalarprodukts $\langle ., .\rangle$ ist.

(b) (5 Punkte) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Seien v, u zwei orthogonale Vektoren (bezüglich $\langle .,. \rangle$), so dass $u + v$ and $u - v$ auch orthogonal sind. Zeigen Sie, dass $||u|| = ||v||$ ist, wobei $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Norm ist.