Übungsblatt 9
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 29.06.2015 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1

(a) (10 Punkte) Beschreiben Sie geometrisch die folgenden Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), die durch $\phi(x) = Ax$ gegeben werden, mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \text{ sowie } A = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 6/7 & 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Daten: Drehachse, Spiegelungsgerade, oder -ebene, Drehwinkel, und -richtung.

(b) (10 Punkte) Die linearen Abbildungen $\phi, \xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien durch

$$\psi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2),\ \psi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2),\ \psi(e_3) = e_3\,,$$

und

$$\xi(e_1) = e_1,\ \xi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3),\ \xi(e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $\tau = \xi \circ \phi$ eine Drehung ist, und bestimmen Sie die Drehachse sowie den Drehwinkel.

Aufgabe 2

(a) (10 Punkte) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass die Aussage "$\langle v, \omega\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(v), f(\omega)\rangle = 0$ für alle $v, \omega \in V$" gilt genau dann, wenn ein orthogonales $g \in \mathrm{End}(V)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existieren mit $f = \lambda g$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zwei unterschiedliche Spalten der zugehörigen Matrix von f bzgl. der Standardbasis orthogonal sind, sowie das gleiche Norm haben.

(b) (10 Punkte) In einem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V seien beliebige Vektoren $v_1, ..., v_m$ gegeben, wobei $m \leq n$. Dann nennt man die Matrix

$$G(v_1, ..., v_m) \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_m\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1\rangle & \cdots & \langle v_m, v_m\rangle \end{pmatrix}$$

die zur Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gehörige Gram'sche Matrix von $v_1, ..., v_m$. Beweisen Sie, dass die Determinante der Gramschen Matrix $G(v_1, ..., v_m)$ genau dann ungleich null ist, wenn $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig sind.