HU Berlin Sommersemester 2015

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Probeklausur

Prof. Dr. Gavril Farkas

Aufgabe 1 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$y_1 = x_1 + 2x_2, y_2 = 2x_2, y_3 = -2x_2 + x_3$$

1. Finden Sie alle Eigenwerte von f und die zugehörigen Eigenräumen.
2. Bestimmen Sie, ob f diagonalisierbar ist.
3. Bestimmen Sie, ob die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(x_1, x_2, x_3) := (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3),$$

   diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2

1. Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $u, v, w \in V$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent
   (a) $u \perp v$
   (b) $||u + v|| = ||u - v||$
   (c) $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$
2. Sei $(\mathbb{R}^4, \langle ., . \rangle)$ der euklidischer Vektorraum mit dem kanonischen Skalarprodukt ausgestatten. Betrachtet man die Unterräume

$$\begin{aligned} V' &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\} \\ V'' &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $V' \perp V''$, das heißt, $v' \perp v''$ für alle $v' \in V'$ und $v'' \in V''$.

Aufgabe 3

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R}).$$

2. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(4,4,\mathbb{R})$$

nilpotent ist, und bestimmen Sie die zugehörige Partition von 4.

Aufgabe 4

1. Welche der folgenden Matrizen in $M(2,2,\mathbb{R})$ sind orthogonal?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

2. Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$T(x,y,z) := \left(\frac{1}{3}(2x+y-2z), \frac{1}{3}(-2x+2y-z), \frac{1}{3}(x+2y+2z)\right)$$

.

Zeigen Sie, dass T eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ ist. Finden Sie die Drehungsachse und den Drehungswinkel von T.