

Klausur
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. Gavril Farkas

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen.

Aufgabe I (15 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und $a, b \in G$ gegeben mit

$$a^2 = e, \quad a^{-1}b^2a = b^3.$$

Zeigen Sie, dass $b^5 = e$ gilt.

Aufgabe II (20 Punkte)

Seien G, H zwei Gruppen und $f : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie die folgende Aussage:

1. für alle $g \in G$ gilt $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.
2. $\ker f$ ist eine Untergruppe von G und $\operatorname{im} f$ ist eine Untergruppe von H .
3. $\ker f = \{e_G\} \Leftrightarrow f$ ist ein injektiver Homomorphismus.
4. $\ker f$ ist ein Normalteiler in G .

Aufgabe III (20 Punkte)

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge aller Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in K$ eine nicht-kommutative Untergruppe von $GL_3(K) := \{A \in M(3, 3 : K) : \det A \neq 0\}$ bilden. Finden Sie eine explizite Formel für alle Potenzen A^n , mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe IV (20 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung die durch

$$\varphi^t(x, y, z) = {}^t(x + y + z, -x + 2y - 2z, 3y - z)$$

gegeben ist.

1. Gegeben Sie eine Basis von $\ker(\varphi)$, sowie eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ an.
2. Bestimmen Sie die Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ wobei \mathcal{B} die kanonische Basis von \mathbb{R}^3 ist und $\mathcal{B}' = ({}^t(1, 1, 0), {}^t(0, 1, 1), {}^t(0, 1, 0))$.

Aufgabe V (25 Punkte)

1. Bestimmen den Rang die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die lineare Abbildung, die durch $f({}^t(x, y, z)) = M^t(x, y, z)$ definiert ist. Für welchen Wert von α ist f bijektiv?
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 1 \\ y + \alpha z = -1 \end{cases}$$