Lineare Algebra und Analytische Geometrie Wintersemester 2016-17, Blatt 1, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(10 Punkte)** Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

- $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
- $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B - C)$.
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
- $B \cap (A - B) = \emptyset$.
- $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

2. **(10 Punkte)** Sei A eine endliche Menge und $f, g : A \to A$ Abbildungen, so dass die Verkettung $g \circ f$ bijektiv ist. Dann sind beide f und g bijektiv.

3. **(10 Punkte)** Seien $f : A \to B$ eine Abbildung, $M \subset A$ and $N \subseteq B$ Teilmengen. Dann, es gilt:

- $M \subseteq f^{-1}(f(M))$ und $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$.
- Die Abbildung f injektiv ist genau dann, wenn $f^{-1}(f(M)) = M$, für alle Teilmengen $M \subseteq A$.
- Die Abbildung f bijektiv ist genau dann, wenn $f(A - M) = B - f(M)$, für beliebige Teilmengen $M \subseteq A$.

4. **(10 Punkte)**

- Betrachtet man die folgenden Mengen: $A_1 := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, A_2 := \{3n : n \in \mathbb{N}\}, A_3 := \{6n : n \in \mathbb{N}\}, A_4 := \{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ und $A_5 := \{3n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie die Mengen $A_1 \cup A_3$, $A_1 \cap A_3$, $A_4 \cup A_5$, $(A_1 \cap A_3) \cup A_2$ und $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

- Benutzen Sie vollständige Induktion nach n um die folgenden Aussagen zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und Übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!