

Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 10, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(18 Punkte)** Es sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sowie $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset K[X]$ und $B_2 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4\} \subset K[X]$ mit

$$b_i = (X - (i - 1))^3 \quad \text{und} \quad \bar{b}_i = \sum_{k=0}^{i-1} X^k, \quad \text{für } i \in \{1, \dots, 4\}.$$

Es sei $B_3 = \{1, X, X^2, X^3\}$ die Standardbasis des K -Vektorraumes V .

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei B_1 und B_2 um Basen von $V = \text{span}\{P \in K[X] : \deg P \leq 3\}$ handelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Polynomes

$$f(X) = X + 2X^2 + X^3,$$

bezüglich B_1 und B_2 .

(b) Bestimmen Sie alle Basen des \mathbb{F}_2 -Vektorraumes $\mathbb{F}_2^3 := \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

2. **(12 Punkte)** Sei $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \exists N_f \in \mathbb{N}, f(n) = 0 \text{ für } n \geq N_f\}$. Zeigen Sie dass die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} : \sum_{i \in \mathbb{N}} f(i) = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

zusammen mit den auf \mathcal{F} eingeschränkten Verknüpfungen von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ bildet. Bestimmen Sie eine Basis dieses Untervektorraumes.

3. **(10 Punkte)** Es sei $n \geq 1$ und φ ein Endomorphismus des \mathbb{R}^n mit

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ji} e_j \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

und geeignete $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$, wenn (e_1, \dots, e_n) wie üblich die Standardbasis des \mathbb{R}^n bezeichnet (die Summe über die leere Indexmenge werde als der Nullvektor gedeutet). Zeigen Sie:

$$\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ mal}} = 0.$$