

Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 11, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. (14 Punkte) Sei $A \in M(3, 3 : \mathbb{Q})$ die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A^2 = A + 2I_3$. (b) Finden Sie reelle Zahlen u_n und v_n , so dass für jede $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:

$$A^n = u_n A + v_n I_3.$$

2. (12 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, 2 : K)$$

existieren Skalaren $\alpha, \beta \in K$, mit $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$. Bestimmen Sie α und β .

3. (14 Punkte)

(a) Sei $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung für welche

$$\begin{aligned} \phi((1, 0, 0, 0)) &= 1 & \phi((1, -1, 0, 0)) &= 0 \\ \phi((1, -1, 1, 0)) &= 1 & \phi((1, -1, 1, -1)) &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\phi((a, b, c, d))$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, die durch

$$T((x, y, z)^t) = (x + y, x - z, 2y + 3z, -x + 5z)^t$$

definiert ist. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_A^B(T)$, wobei die Basen A (bzw. B) für \mathbb{R}^3 (bzw. \mathbb{R}^4) sind

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!